

# Cuprins

Soluții

|                                                 |     |     |
|-------------------------------------------------|-----|-----|
| Capitolul 1 – Metoda SOS .....                  | 7   | 117 |
| Capitolul 2 – Inegalitatea mediilor .....       | 25  | 143 |
| Capitolul 3 – Inegalitatea Cauchy–Schwarz ..... | 43  | 175 |
| Capitolul 4 – Inegalitatea lui Hölder .....     | 58  | 200 |
| Capitolul 5 – Inegalitatea lui Minkowski .....  | 73  | 217 |
| Capitolul 6 – Inegalitatea lui Cebîșev .....    | 77  | 220 |
| Capitolul 7 – Inegalitatea lui Schur .....      | 85  | 230 |
| Capitolul 8 – Inegalitatea lui Jensen .....     | 90  | 238 |
| Capitolul 9 – Metoda $pqr$ .....                | 102 | 265 |
| Capitolul 10 – Substituții trigonometrice ..... | 111 | 281 |
| <br><i>Bibliografie</i> .....                   |     | 300 |

**LEGENDĂ:**

- a) – Inițiere
- b) – Extindere
- c) – Dezvoltare
- d)-k) – Generalizare

# Capitolul 1

## Metoda SOS\*

„Dicționar:  $X = \text{Eternul necunoscut}$   
 $Y = \text{Praștia alfabetului.}$ ”  
 Tudor Mușatescu

Sunt adevărate afirmațiile:

$$a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = 0.$$

$$(a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca), \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}, \text{ cu egalitate pentru } \Delta = 0 \text{ și } x = \frac{-b}{2a}.$$

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \leq 0, \text{ cu egalitate dacă } x = a \text{ sau } x = b.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, \forall a, b, c \geq 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}, \forall a, b > 0, \text{ cu } ab \geq 1.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0 \text{ și } abc = 1, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c = 1.$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9, \forall a, b, c > 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b), \forall a, b \geq 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b.$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a+b}{3}, \forall a, b > 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b.$$

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a-b}{3}, \forall a, b > 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b.$$

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b), \forall a, b \geq 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b.$$

### Teorema SD5

Fie  $F(x, y, z)$  un polinom omogen și simetric. Dacă  $\begin{cases} F(x, y, 0) \geq 0 \\ F(x, 1, 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x, y, z) \geq 0.$

---

\* SOS method = Sum of Squares = sumă de pătrate

1.1. a) Fie  $a, b, c > 0$  astfel încât  $abc = 1$ . Arătați că:

$$\sum \frac{c(a^2 + b^2) + 1}{a + b} \geq \frac{3}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

*Daniel Sitaru, Drobeta Turnu-Severin*

b) Fie  $a, b, c, d > 0$  astfel încât  $abcd = 1$ . Arătați că:

$$\sum \frac{d(a^3 + b^3 + c^3) + 1}{a + b + c} \geq \frac{4}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

*Marin Chirciu*

1.2. a) Fie  $x, y > 0$  astfel încât  $x + y = 2$ . Aflați minimul și maximul expresiei

$$E(x, y) = \frac{1}{x^2 - 3x + 5} + \frac{1}{y^2 - 3y + 5}.$$

*S: L19.329 din SGM 12/2019, Dan Andrei Tudor, elev, București*

b) Fie  $x, y > 0$  astfel încât  $x + y = 2$ . Aflați minimul și maximul expresiei

$$E(x, y) = \frac{1}{x^2 - ax + 2a - 1} + \frac{1}{y^2 - ay + 2a - 1}, \text{ unde } 1 \leq a \leq 4.$$

*MATCH 12/2019*

1.3. a) Dacă  $x > 0$  atunci:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{x^2 + 2} \geq \frac{7 - 2x}{18}.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{x^2 + n} \geq \frac{n + 12 - 4x}{(n + 4)^2}, \text{ unde } 0 \leq n \leq 4.$$

b) Fie  $a, b, c > 0$  astfel încât  $a + b + c = 6$ . Arătați că:

$$\text{i)} \quad \frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \leq 2.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{a^2}{a^2 + n} + \frac{b^2}{b^2 + n} + \frac{c^2}{c^2 + n} \leq \frac{12}{n + 4}, \text{ unde } 0 \leq n \leq 4.$$

1.4. a) Dacă  $a, b, c > 0$  și  $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6$ , atunci

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq \frac{9}{(a + b + c)^2}.$$

*RMM 03/2020, Nguyen Viet Hung, Vietnam*

b) Dacă  $a, b, c > 0$  și  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ , atunci:

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq \frac{9}{(a + b + c)^2}.$$

c) Dacă  $a, b, c > 0$  și  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  și  $n \geq 1$ , atunci:

$$\frac{1}{a^2 + n} + \frac{1}{b^2 + n} + \frac{1}{c^2 + n} \leq \frac{27}{(n + 1)(a + b + c)^2}.$$

*MATCH 08/2020*

**1.5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale:**

$$\text{a) } \sqrt[4]{\frac{x^8+1}{2}} \leq \sqrt{x^4-x^2+1} \leq 2x^2-3x+2. \quad \text{b) } 3\sqrt[3]{x^2-x+1} \leq x^2-x+3.$$

$$\text{c) } 3\sqrt[3]{x^2-x+1} + \sqrt[4]{\frac{x^8+1}{2}} = 2(x^4-3x+4).$$

*JP.304, 21-RMM Summer Edition 2021, Hoang Le Nhat Tung, Vietnam*

$$\text{d) } \sqrt{x^4-x^2+1} \leq 2x^2-3x+2. \quad \text{e) } 3\sqrt[3]{x^2-x+1} \leq x^2-x+3.$$

$$\text{f) } 3\sqrt[3]{x^2-x+1} + \sqrt{x^4-x^2+1} = 2(x^4-3x+4).$$

*IneMath 2020*

**1.6. Fie  $a, b, c > 0$  astfel încât  $abc \leq 1$ . Arătați că:**

$$\text{a) } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

*G.380, Recreații Matematice 1/2020, D.M. Bățineșu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Ploiești*

$$\text{b) } \frac{1}{a^3(b+\lambda c)} + \frac{1}{b^3(c+\lambda a)} + \frac{1}{c^3(a+\lambda b)} \geq \frac{3}{\lambda+1}, \text{ unde } \lambda \geq 0.$$

$$\text{c) } \frac{1}{a^n(b+\lambda c)} + \frac{1}{b^n(c+\lambda a)} + \frac{1}{c^n(a+\lambda b)} \geq \frac{3}{\lambda+1}, \lambda \geq 0 \text{ iar } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

**1.7. a) Fie  $a, b, c > 0$ . Arătați că  $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$ .**

*GM 7-8/1992, Vasile Cârtoaje*

**b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale**

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = a^3+b^3+c^3 \\ a^3b+b^3c+c^3a = 3 \end{cases}.$$

*JP.304, 21-RMM Summer Edition 2021, Hoang Le Nhat Tung, Vietnam*

**1.8. Dacă  $a, b, c > 0$  și  $abc = 1$  și  $n \geq 0$ , atunci:**

$$\text{a) } \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{b^2+b} + \frac{1}{c^2+c} \geq 2 \left( \frac{1}{a^2+b^2+2} + \frac{1}{b^2+c^2+2} + \frac{1}{c^2+a^2+2} \right).$$

*RMM 1/2020, Tritrotoluen 1/2020*

$$\text{b) } \frac{1}{na^2+a} + \frac{1}{nb^2+b} + \frac{1}{nc^2+c} \geq \frac{4}{n+1} \left( \frac{1}{a^2+b^2+2} + \frac{1}{b^2+c^2+2} + \frac{1}{c^2+a^2+2} \right).$$

$$\text{c) } \frac{1}{a^2+na} + \frac{1}{b^2+nb} + \frac{1}{c^2+nc} \geq \frac{4}{n+1} \left( \frac{1}{a^2+b^2+2} + \frac{1}{b^2+c^2+2} + \frac{1}{c^2+a^2+2} \right).$$

*IneMath 2020*

**1.9. Dacă  $x, y \in [0, 1]$ , atunci:**

$$\text{a) } \frac{x}{\sqrt{2y^2+5}} + \frac{y}{\sqrt{2x^2+5}} \leq \frac{x+y}{\sqrt{2x^2+2y^2+3}}.$$

$$b) \frac{x}{\sqrt{2y^2+5}} + \frac{y}{\sqrt{2x^2+5}} \leq \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

*Inequality in triangle 1478, 03/2020, Mathematical Olympiads*

$$c) \frac{x}{\sqrt{ay^2+b}} + \frac{y}{\sqrt{ax^2+b}} \leq \frac{x+y}{\sqrt{ax^2+by^2+b-a}}, \text{ unde } 0 < a < b.$$

$$d) \frac{x}{\sqrt{ay^2+b}} + \frac{y}{\sqrt{ax^2+b}} \leq \frac{2}{\sqrt{a+b}}, \text{ unde } 0 < a < b.$$

**1.10.** a) Dacă  $x > 0$ , atunci:

$$i) \sqrt{x^4+8x} \leq x^2+2.$$

$$ii) \sqrt{x(x^3+a^3)} \leq x^2 + \frac{a^2}{2}, \text{ unde } a \geq \sqrt{2}.$$

$$iii) \frac{x^3}{x^2+\lambda} \geq \frac{(3\lambda+1)x-2\lambda}{(\lambda+1)^2}, \text{ unde } \lambda \geq 1.$$

b) Fie  $x, y, z > 0$  astfel încât  $x+y+z=3$ . Determinați minimul expresiei:

$$T = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+8x}} + \frac{y^3}{\sqrt{y^4+8y}} + \frac{z^3}{\sqrt{z^4+8z}}.$$

c) Fie  $x, y, z > 0$  astfel încât  $x+y+z=3$  și  $a \geq \sqrt{2}$ . Arătați că:

$$\frac{x^3}{\sqrt{x(x^3+a^3)}} + \frac{y^3}{\sqrt{y(y^3+a^3)}} + \frac{z^3}{\sqrt{z(z^3+a^3)}} \geq \frac{6}{a^2+2}.$$

*Marin Chirciu*

**1.11.** Dacă  $a, b, c > 0$  și  $abc=1$ , atunci:

$$a) \sum \frac{a(b^2+c^2)+1}{b+c} \geq \frac{3}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

*JP.310, 21-RMM Summer Edition 2021, Daniel Sitaru, Drobeta Turnu-Severin*

$$b) \sum \frac{a(b^2+c^2)+n}{b+c} \geq \frac{n+2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \text{ unde } n \leq 2.$$

**1.12.** Fie  $x, y, z > 0$  cu  $x+y+z=3$ . Arătați că:

$$a) \frac{7-6x}{2+x^2} + \frac{7-6y}{2+y^2} + \frac{7-6z}{2+z^2} \geq 1.$$

$$b) \frac{3n+1-3nx}{n+x^2} + \frac{3n+1-3ny}{n+y^2} + \frac{3n+1-3nz}{n+z^2} \geq \frac{3}{n+1}, \text{ unde } n \geq 0.$$

**1.13.** a) Dacă  $a, b, c > 0$ , atunci:

$$a\sqrt{3a^2+6b^2} + b\sqrt{3b^2+6c^2} + c\sqrt{3c^2+6a^2} \geq (a+b+c)^2.$$

*Saudi Arabia Mathematical Competition, 2020*

b) Dacă  $a, b, c > 0$  și  $x \geq 1, y \geq 4, xy = 4x + y$ , atunci:

$$a\sqrt{xa^2 + yb^2} + b\sqrt{xb^2 + yc^2} + c\sqrt{xc^2 + ya^2} \geq (a + b + c)^2.$$

c) Dacă  $a, b, c > 0$ , atunci:

$$a\sqrt[3]{9(a^3 + 2b^3)} + b\sqrt[3]{9(b^3 + 2c^3)} + c\sqrt[3]{9(c^3 + 2a^3)} \geq (a + b + c)^2.$$

d) Dacă  $a, b, c > 0$ , atunci:

$$a\sqrt[4]{27(a^4 + 2b^4)} + b\sqrt[4]{27(b^4 + 2c^4)} + c\sqrt[4]{27(c^4 + 2a^4)} \geq (a + b + c)^2$$

e) Dacă  $a, b, c > 0$  și  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , atunci:

$$a^n\sqrt[n]{3^{n-1}(a^n + 2b^n)} + b^n\sqrt[n]{3^{n-1}(b^n + 2c^n)} + c^n\sqrt[n]{3^{n-1}(c^n + 2a^n)} \geq (a + b + c)^2.$$

MATCH 04/2020

1.14. a) Determinați valoarea minimă a funcției:

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{4^x + 4^y}{(2^{x+1} + 2^y)(2^x + 2^{y+1})}.$$

Jalil Hajimir, Canada

b) Fie  $a > 0, a \neq 1$ , fixat. Determinați valoarea minimă a funcției:

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{a^{2x} + a^{2y}}{(a^{x+1} + a^y)(a^x + a^{y+1})}.$$

1.15. Dacă  $a, b, c > 0$  astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6$ , atunci:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Hoang Le Nhat Tung, Vietnam

1.16. Dacă  $a, b, c > 0$ , atunci:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{ab+bc+ca}{8} \geq \frac{9}{8}.$$

Hoang Le Nhat Tung, Vietnam

1.17. a) Fie  $a, b, c, d > 0$  astfel încât  $a + b + c + d = 1$ . Arătați că:

$$ab(1-c) + ac(1-d) + ad(1-b) + bc(1-d) + d(b+c) + abcd \leq \frac{81}{256}.$$

P.1122, Enjoy Solving Mathematics, Kunihiko Chikaya

b) Fie  $a, b, c > 0$  astfel încât  $a + b + c = 1$ . Arătați că:

$$ab + bc + ca - abc \leq \frac{8}{27}.$$

1.18. Dacă  $a, b > 0$ , atunci:

a)  $2(a^9 + b^9) \geq (a^4 + b^4)(a^5 + b^5).$

b)  $2(a^{n+k} + b^{n+k}) \geq (a^n + b^n)(a^k + b^k)$ , unde  $n, k \in \mathbb{N}$ .

IneMath 2020

**1.19.** Găsiți valoarea minimă a expresiei:

a)  $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(x + \frac{1}{y} - 2020\right) + \left(y + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{x} - 2020\right)$ , unde  $x, y > 0$ .

*Amir Sofi*

b)  $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(x + \frac{1}{y} - 2\lambda\right) + \left(y + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{x} - 2\lambda\right)$ , unde  $x, y > 0, \lambda \geq 2$  fixat.

**1.20.** Dacă  $a, b \geq 0$ , atunci:

a)  $\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$ .

*Olimpiada Belarus 2005*

b)  $(a^2 + b + n)(b^2 + a + n) \geq \left(2a + n - \frac{1}{4}\right)\left(2b + n - \frac{1}{4}\right)$ , unde  $n \geq 0$ .

**1.21.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale:

a)  $\frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} + \frac{y^2 + y}{y^2 + y + 1} + \frac{z^2 + z}{z^2 + z + 1} + 1 = 0$ .

b)  $\frac{x^2 + x}{x^2 + x + n} + \frac{y^2 + y}{y^2 + y + n} + \frac{z^2 + z}{z^2 + z + n} + \frac{3}{4n - 1} = 0$ , unde  $n > \frac{1}{4}$ .

c)  $\frac{1}{x^3 + x} + \frac{1}{y^3 + y} + 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

**1.22.** a) Dacă  $a, b > 0$ , atunci  $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3}$ .

b) Fie  $x, y, z > 0$  astfel încât  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$ . Arătați că  $\sum \frac{\sqrt{x^3}}{x + \sqrt{xy} + y} \geq \frac{2}{3}$ .

*Mathematika 05/2020, Julio Cesar Moroch Orlando*

c) Dacă  $a, b > 0$ , atunci  $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a + b}{3}$ .

d) Fie  $x, y, z > 0$  astfel încât  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$ . Arătați că  $\sum \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}}{x + \sqrt{xy} + y} \geq \frac{4}{3}$ .

e) Dacă  $a, b > 0$  și  $\lambda \geq 0$ , atunci  $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + \lambda ab + b^2} \geq \frac{a + b}{\lambda + 2}$ .

f) Fie  $x, y, z > 0$  astfel încât  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$  și  $\lambda \geq 0$ . Arătați că:

$$\sum \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}}{x + \lambda\sqrt{xy} + y} \geq \frac{4}{\lambda + 2}.$$

*Dezvoltări, Marin Chirciu*

1.23. a) Dacă  $x, y, z > 0$ , atunci:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

b) Fie  $x, y, z$  numere reale pozitive astfel încât  $xyz(xy+yz+zx) = 3$ . Arătați că:

$$(2x^2 - xy + 2y^2)(2y^2 - yz + 2z^2)(2z^2 - zx + 2x^2) \geq 27.$$

*J519 Mathematical Reflections, Hoang Le Nhat Tung, Vietnam*

1.24. Fie  $x, y > 0$ . Arătați că:

$$a) \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq \frac{2(x^5 + y^5)}{x^4 + y^4}.$$

*Rahim Shahbazov, Azerbaidjan*

$$b) \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} \geq \frac{2(x^5 + y^5)}{x^3 + y^3}.$$

1.25. Dacă  $x, y, z > 0$  astfel încât  $xyz = 1$ , atunci  $\sum \frac{x^2 y^2}{2x^2 + 3x^2 y^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$ .

*Mathematical Inequalities 5/2020, Vietnamez quiz*

1.26. Dacă  $x, y, z > 0$ , atunci:

$$a) \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2 - xy + y^2}.$$

$$b) \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + x^2}.$$

$$c) \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} + \sqrt{z^2 - zx + x^2}.$$

*Mathematical Inequalities 5/2020, Abdul Hannan*

1.27. Dacă  $a, b, c > 0$  astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ , găsiți minimul expresiei:

$$E = \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}.$$

*Halit Shehu*

1.28. Dacă  $a, b, c > 0$  astfel încât  $ab + bc + ca + abc = 4$ , găsiți maximul expresiei:

$$a) P = \frac{4}{(a+b)^2 + 20} + \frac{4}{(b+c)^2 + 20} + \frac{4}{(c+a)^2 + 20}.$$

*Mathematical Inequalities 6/2020, Imad Zak, China*

$$b) P = \frac{12}{(a+b)^3 + 64} + \frac{12}{(b+c)^3 + 64} + \frac{12}{(c+a)^3 + 64}.$$

$$c) P = \frac{32}{(a+b)^4 + 176} + \frac{32}{(b+c)^4 + 176} + \frac{32}{(c+a)^4 + 176}.$$

$$d) P = \frac{80}{(a+b)^5 + 448} + \frac{80}{(b+c)^5 + 448} + \frac{80}{(c+a)^5 + 448}.$$

$$e) P = \frac{n2^{n-1}}{(a+b)^n + (3n-1)2^n} + \frac{n2^{n-1}}{(b+c)^n + (3n-1)2^n} + \frac{n2^{n-1}}{(c+a)^n + (3n-1)2^n}, n \in \mathbb{N}.$$

**1.29.** Dacă  $a, b$  sunt numere reale atunci:

$$a) \frac{a^4 + 9a^2 + 4}{5b^2 + 8} + \frac{b^4 + 9b^2 + 4}{5a^2 + 8} \geq a + b.$$

*E:15724, GM 5/2020, Constantin Nicolau*

$$b) \frac{a^4 + (n+1)^2 a^2 + n^2}{(2n+1)b^2 + n(n+2)} + \frac{b^4 + (n+1)^2 b^2 + n^2}{(2n+1)a^2 + n(n+2)} \geq a + b, \text{ unde } n > 0.$$

**1.30.** Dacă  $x, y, z \geq 0$  și  $x + y + z = 3$ , atunci:

$$a) \frac{1}{x^3 + 8} + \frac{1}{y^3 + 8} + \frac{1}{z^3 + 8} \leq \frac{1}{3}.$$

*Mathematical Inequalities 6/2020, Rahim Shahbazov, Azerbaidjan*

$$b) \frac{1}{x^3 + n} + \frac{1}{y^3 + n} + \frac{1}{z^3 + n} \leq \frac{3}{n+1}, \text{ unde } n \geq 7.$$

$$\mathbf{1.31.} \ a) \text{ Dacă } a \in \mathbb{R}, \text{ atunci } a^2 - a + 1 \geq \sqrt{\frac{a^4 + 1}{2}}.$$

$$b) \text{ Dacă } a, b \in \mathbb{R}, \text{ atunci } a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2} \sqrt{(a^4 + 1)(b^4 + 1)}.$$

$$c) \text{ Dacă } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ și } \prod (a^2 - a + 1) = 1, \text{ atunci } \prod (a^2 + ab + b^2) \leq 27.$$

*Mathematical Inequalities 2/2020, Marius Stănean*

$$d) \text{ Dacă } a, b > 0, \text{ atunci } (a^3 + 1)(b^3 + 1) \geq ab(a+1)(b+1).$$

$$e) \text{ Dacă } a, b, c > 0 \text{ astfel încât } \prod (a^3 + 1) = 8, \text{ atunci } \prod a(a+1) \leq 8.$$

*Marin Chirciu*

$$\mathbf{1.32.} \ a) \text{ Dacă } a \in \mathbb{R}, \text{ atunci } 2(1 - a + a^2) \geq 1 + a^4.$$

$$b) \text{ Dacă } a, b \in \mathbb{R}, \text{ atunci } 2(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) \geq 1 + a^2 b^2.$$

$$c) \text{ Dacă } a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ atunci } \prod (a^2 - a + 1) \geq 1 + abc + a^2 b^2 c^2.$$

*Mathematical Inequalities 6/2020, Vasile Cârtoaje și Mircea Lascu*

**1.33.** a) Dacă  $a, b, c \geq 0$ , atunci:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + 2.$$

*S514 Mathematical Reflections 2/2020, An Zhenping, China*